11/12/2018

$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ κανονικές βάσεις

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ — $A\mathbb{R}^3 = \langle$ στήλες του $A\rangle$

$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\Sigma_A = \mathrm{Im}A = $ τάξη A

$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(1,0)A = (1,2,3)$ $\mathbb{R}^2 A = \langle$ γραμμές του $A\rangle = \Gamma_A$

$(0,1)A = (4,5,6)$

$A_{m\times n}$ πίνακας και $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ με τις κανονικές βάσεις

$A(\mathbb{R}^n) = \Sigma_A =$ χώρος στηλών του A

$\dim \Sigma_A =$ ο αριθμός των γραμ. ανεξ. στηλών του A.

$\shortparallel$

Αυτό θα είναι και $\dim A(\mathbb{R}^n)$

$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ με πολ/μό από τα αριστερά

$e_1 A$ = πρώτη γραμμή του A
$e_2 A$ = δεύτερη »
$\vdots$
$e_m A$ = τελευταία »

Γ_A = <ο υπόχωρος που δημιουργείται από τις γραμμές του A.>

Έστω ότι ο A είναι $n \times n$ αντιστρέψιμος $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με πολ/μο από δεξιά.

$A(e_i)$ ← κανονικό διάνυσμα σαν στήλη

$\dim A(\mathbb{R}^n) = \dim \Sigma_A = n \iff$ στήλες είναι γρ. ανεξ.

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με πολ/μό από αριστερά

$(e_i)A$
← κανονικό διάνυσμα σαν γραμμή

$\dim \Gamma_A = n \iff$ οι γραμμές είναι γρ. ανεξ.

ΠΡΟΤΑΣΗ α) Έστω P $n \times n$ αντιστρέψιμος. Τότε οι γραμμές του και οι στήλες του είναι γρ. ανεξ. Ισοδύναμα $\dim \Gamma_A = \dim \Sigma_A = n$
β) Έστω P $n \times n$ και Q $m \times m$ αντιστρέψιμοι πίνακες αν A είναι $m \times n$ πίνακας τότε ισχύει:
$$\Sigma_A = \Sigma_{QAP}$$

γ) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε $\dim \Sigma_A = \dim \Gamma_A = \operatorname{rank} A$

Αποδ. α) Προηγουμένως

β) $\Sigma_{QAP} = Im(QAP(\mathbb{R}^n))$ εδώ χρησιμοποιούμε τις κανονικές βάσεις.

$$P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$$

$$A(P(\mathbb{R}^n)) = A(\mathbb{R}^n) : A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$Q(A(P(\mathbb{R}^n))) = Q(A(\mathbb{R}^n)) = A(\mathbb{R}^n) = \Sigma_A$$

Άρα

$$\Sigma_{QAP} = QAP(\mathbb{R}^n) = A(\mathbb{R}^n) = \Sigma_A$$

γ) $A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Γνωρίζουμε ότι $\exists$ πίνακες αλλαγής βάσης P στον $\mathbb{R}^n$ και Q ώστε ο QAP να έχει μορφή $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$QAP = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r = rank A =$
$= \dim Im A =$
$= \dim \Sigma_A$

$$\dim \Sigma \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim \Gamma \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r$$

Άρα $\dim \Sigma_A = \dim \Gamma_A = rank A$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$rank A \leq 3$

$rank A_{m\times n} = \min(n, m)$

$$rank A = rank A^t$$

$M(m\times n, \mathbb{R})$ δ.χ. $\dim M(m\times n, \mathbb{R}) = m\times n$
και μια κανονική βάση του αποτελείται από όλους τους $m\times n$ πίνακες οι οποίοι έχουν όλα τα στοιχεία τους μηδέν εκτός από ένα που είναι 1 σε διαφορετική θέση

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M(m\times n, \mathbb{R})$

$\text{rank} A = \text{ran} B = r$

$$Q\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q' B P'$$

Q, Q' αντιστρέψιμοι $m\times m$ $A = \underbrace{Q^{-1} Q'}_{\text{αντισ.}} B \underbrace{P' P^{-1}}_{\text{αντισ.}}$
P, P' « » $n\times n$

A είναι ισοδύναμος με τον B

Το σύνολο $M(m\times n, \mathbb{R})$ χωρίζεται σε υποσύνολα τα οποία περιέχουν πίνακες με την ίδια βαθμίδα.

$A \neq B$ είναι ισοδύναμοι
$A = Q'' B P''$
αντιστ.

Scanned by CamScanner

$\text{rank}A = r = \text{rank}B$

$A \neq \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\text{rank}A = 2 = \dim \Sigma_A = \dim \Gamma_A$

$\Sigma_A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{R}^2$

$\Gamma_A = \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle \leq \mathbb{R}^3$

$QAP = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Sigma_A = \Sigma_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

$\Sigma_A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle, \ \Sigma_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2$

$\Gamma_A = \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle \neq \Gamma_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

Αλλά $\dim \Gamma_A = \dim \Gamma_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Ορισμός: Έστω $L(V^n, W^m)$ το σύνολο των γρ. απεικ.

Scanned by CamScanner

από το δ.χ. V^n στον δ.χ. W^m. Γνωρίζουμε ότι αν προσθέσουμε δύο γρ. απεικ. $T, T': V \to W$ τότε ορίζεται μια νέα γρ. απεικ. $T+T': V \to W$ και μπορούμε να πολ/με μια γραμ. απεικ. με έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha T: V \to W$
$(T+T')(v) = T(v) + T'(v)$, $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $L(V^n, W^m)$ γίνεται δ.χ.

ΘΕΩΡΗΜΑ $\dim L(V^n, W^m) = n \cdot m$.

Αποδ: Πρέπει να βρούμε $n \times m$ γρ. απεικ. ώστε κάθε γρ. απεικ. να είναι γρ. συνδυασμός αυτών και αυτές να είναι γρ. ανεξ.

Έστω $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$
Ορίζουμε την $f_{ij}: V \to W$ με τύπο
$f_{ij}(v_i) = w_j$ ⊕ $f_{ij}(v_t) = 0$ αν $t \neq i$ και η f_{ij} είναι γραμμική. Αν ορίζονται για $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, m$

Δηλαδή αν $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ τότε $f_{ij}(v) = f_{ij}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$
$= \alpha_1 f_{ij}(v_1) + \dots + \alpha_n f_{ij}(v_n) \overset{⊕}{=} \alpha_i f_{ij}(v_i) = \alpha_i w_j$

Πρέπει ν.δ.ο. το σύνολο $\{ f_{ij} \mid i = 1, \dots, n \text{ και } j = 1, \dots, m \}$ γεννά το χώρο $L(V, W)$ και είναι γρ. ανεξ.

Γεννητ: Έστω $T \in L(V, W)$ δηλ. το $T: V^n \to W^m$

$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)$ ⊕⊕

Έστω
$$\left.\begin{aligned} T(v_1) &= b_{11}w_1 + b_{21}w_2 + \dots + b_{m1}w_m \\ T(v_2) &= b_{12}w_1 + \dots + b_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= b_{1n}w_1 + \dots + b_{mn}w_m \end{aligned}\right\} (***)$$

$$(T, S, S') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(v) = {} & a_1(b_{11}w_1 + \dots + b_{m1}w_m) \\ & a_2(b_{12}w_1 + \dots + b_{m2}w_m) \\ & \vdots \\ & a_n(b_{1n}w_1 + \dots + b_{mn}w_m) = \end{aligned}$$

$$= (a_1 b_{11} + \dots + a_n b_{1n})w_1 + \dots + (a_1 b_{m1} + \dots + a_n b_{mn})w_m$$

Εικόνα τυχαίου στοιχείου ↑

$$a_1 T(v_1) = a_1 b_{11} \underset{\substack{\| \\ f_{11}(v_1)}}{w_1} + \dots + a_1 b_{m1} \underset{\substack{\| \\ f_{1m}(v_1)}}{w_m}$$

$$= a_1 b_{11} f_{11}(v_1) + \dots + a_1 b_{m1} f_{1m}(v_1)$$

Η εικόνα $T(v_1)$ είναι γρ. συνδ. των $f_{11}(v_1), f_{12}(v_1), \dots, f_{1m}(v_1)$

Άρα κάθε $T(v_i)$ είναι γρ. συνδ. των $f_{i1}(v_i), \dots, f_{im}(v_i)$

Άρα και το τυχαίο $T(v)$ δίνεται σαν γρ. συνδ. των $f_{ij}(v)$
Δηλ. το σύνολο $\{f_{ij} \mid i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m\}$

γεννά το χώρο $L(V, W)$. Έστω ότι $\sum \alpha_{ij} f_{ij}$ = μηδενική απεικόνιση

Τότε $\sum \alpha_{ij} f_{ij}(v_i) = \bar{o}_w$

$\sum \alpha_{ij} f_{ij}(v_1) = \bar{o}_w$

$\sum \alpha_{ij} w_j = \bar{o}_w$

Αλλά w_j είναι γρ ανεξ. $\Rightarrow$ $\alpha_{ij} = 0$ για όλα τα j και γενικά $\alpha_{ij} = 0$ για όλα τα i και j.